SESSION DE 1998

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Épreuve commune aux ENS de Cachan et Ulm

DURÉE : 4 heures

L'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé pour toutes les épreuves d'admissibilité, sauf pour les épreuves de français et de langues. Cependant, une seule calculatrice à la fois est admise sur la table ou le poste de travail, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats.

Partie I

I.1. Soit a un nombre réel et u_0 une fonction à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On cherche une application

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (t,x) & \mapsto & u(t,x) \end{array}$$

de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telle que

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + a\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = 0, \qquad \text{pour tout } (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R},$$

$$(2) \qquad u(0,x) = u_0(x), \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

I.1.a. Montrer que la fonction $v(t,x)$ définie par $v(t,x) = u_0(x-at)$ vérifie (1) et (2).

I.1.b. Soit Φ l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (t,x) & \mapsto & (t, x-at). \end{array}$$

Montrer que Φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

I.1.c. Soit $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ vérifiant (1)-(2) et soit $\bar{u}$ l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\bar{u} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (\tau, \xi) & \mapsto & u \circ \Phi^{-1}(\tau, \xi). \end{array}$$

Calculer $\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial \tau}$ et en déduire que la solution donnée au **I.1.a** est l'unique solution $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ de (1)-(2).

I.2. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ et b un nombre réel. On cherche $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ solution de

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + a\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) + bu(t,x) = f(t,x), \qquad \text{pour tout } (t,x) \in \mathbb{R}^2, \tag{3}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

I.2.a. Montrer que la fonction w définie par

$$w(t,x) = e^{-bt}u_0(x - at) + \int_0^t e^{-b(t-s)} f(s, x - a(t-s))ds$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et vérifie (3)-(4).

I.2.b. En s'inspirant de la question **I.1**, montrer que c'est l'unique solution de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ de (3)-(4).

I.3. On note $l^2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des suites de nombres complexes indexées par $\mathbb{Z}$ et de carré sommable. L'espace $l^2(\mathbb{Z})$ est muni de sa norme habituelle : si $a = (a_m)_{m\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ alors $\|a\| = \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} |a_m|^2\right)^{1/2}$. Soit S_+ et S_- les applications définies sur $l^2(\mathbb{Z})$ par

$$S_+ : \begin{array}{ccc} l^2(\mathbb{Z}) & \to & l^2(\mathbb{Z}) \\ a & \mapsto & S_+a \end{array}, \qquad S_- : \begin{array}{ccc} l^2(\mathbb{Z}) & \to & l^2(\mathbb{Z}) \\ a & \mapsto & S_-a \end{array},$$

et pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $(S_+a)_m = a_{m+1}$, $(S_-a)_m = a_{m-1}$. Montrer que S_+ et S_- sont des applications linéaires et continues sur $l^2(\mathbb{Z})$ et que S_+ et S_- sont bijectives. Quels sont leurs inverses ?

I.4. Pour $j \in \mathbb{N}^*$, on note $(S_+)^j$ la composée $\underbrace{S_+ \circ \ldots \circ S_+}_{j \text{ fois}}$ et $(S_+)^{-j}$ la composée $\underbrace{(S_+)^{-1} \circ \ldots \circ (S_+)^{-1}}_{j \text{ fois}}$. Enfin $(S_+)^0 = \mathrm{Id}$.

On appelle **schéma scalaire à un pas** la donnée d'une famille d'applications paramétrées par deux réels $(h,k) \in]0,1[^2$, qui à $(U_m^0(h,k))_{m\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ associe la suite $(U^n(h,k))_{n\in\mathbb{N}} \in (l^2(\mathbb{Z}))^{\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence

$$U^{n+1}(h,k) = \sum_{j=-p}^{p} a_j(h,k) S_+^j U^n(h,k), \qquad n \geq 0 \tag{5}$$

où pour tout entier n, $U^n(h,k) \equiv (U_m^n(h,k))_{m\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$, $p \in \mathbb{N}$ et les applications $(h,k) \mapsto a_j(h,k)$ pour $j = -p, \ldots, p$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $]0,1[^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Dans toute la suite du problème, on omettra d'écrire explicitement la dépendance de $U^n(h,k)$ en (h,k) et on notera $U^n(h,k) \equiv U^n$ afin de simplifier les notations. Par abus, on appellera la relation (5) "schéma scalaire à un pas".

Intuitivement, $U_m^n(h,k)$ est une approximation de la valeur au point $(t_n, x_m) = (nk, mh)$ de la solution d'une équation un peu plus générale que (1). On désigne par (Σ_1) :

$$(\Sigma_1) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{Z}, \quad \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} + a\frac{U_{m+1}^n - U_m^n}{h} = 0.$$

I.4.a. Calculer l'entier p et les applications $a_j(h,k)$ associées au schéma (Σ_1). On les notera p_1 et $a_j^1(h,k)$.

I.4.b. Soit $u_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et $u(t,x)$ vérifiant (1)-(2). Pour tout $(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, on pose $u_m^n = u(nk, mh)$ où $(h,k) \in]0,1[^2$. On note u^n la suite $(u_m^n)_{m\in\mathbb{Z}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$,

$$u_m^{n+1} - \sum_{j=-p_1}^{p_1} a_j^1(h,k)(S_+^j u^n)_m = k(O(h) + O(k))$$

lorsque $(h,k) \to (0,0)$ dans $]0,1[^2$.

Partie II

II.1. Soit $D \subset]0,1[^2$ tel que $(0,0) \in \bar{D}$ ($\bar{D}$ désigne l'adhérence de D dans $\mathbb{R}^2$ muni de la topologie usuelle). On dit que le schéma (5) est **fortement stable** sur D si et seulement si il existe $(\kappa, \beta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ tels que pour tout $U^0 \in l^2(\mathbb{Z})$, pour tout $(h,k) \in D$, la suite U^n donnée par (5) vérifie

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N} \qquad \|U^n\| \leq \kappa e^{\beta nk}\|U^0\|.$$

Soit $h^1(\mathbb{Z}) = \{a \in l^2(\mathbb{Z}) \text{ tel que } (ma_m)_{m\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})\}$.

II.1.a. Montrer que $h^1(\mathbb{Z})$ est dense dans $l^2(\mathbb{Z})$.

II.1.b. Pour $a \in h^1(\mathbb{Z})$ et $\xi \in \mathbb{R}$, on introduit $\hat{a}(\xi) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m e^{im\xi}$. Montrer que la fonction $\hat{a}$ est définie sur $\mathbb{R}$, continue et 2π-périodique. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} |\hat{a}(\xi)|^2 d\xi = 2\pi \sum_{m\in\mathbb{Z}} |a_m|^2.$$

II.1.c. Jusqu'à la fin de la question **II.1.**, on se donne $U^0 \in h^1(\mathbb{Z})$ et U^n obtenue par le schéma (5). Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U^n \in h^1(\mathbb{Z})$.

II.1.d. Montrer qu'il existe une fonction g :

$$g : \begin{array}{ccc}]0,1[\times]0,1[\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ (h,k,\xi) & \mapsto & g(h,k,\xi) \end{array}$$

de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $(h,k,\xi) \in]0,1[\times]0,1[\times\mathbb{R}$, on ait

$$\widehat{U^{n+1}}(\xi) = g(h,k,\xi)\widehat{U^n}(\xi).$$

II.1.e. Calculer la fonction g associée au schéma (Σ_1). (On posera $\lambda = \frac{ak}{h}$).

II.1.f. On se donne un domaine $D \subset]0,1[^2$ tel que $(0,0) \in \bar{D}$. On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $(h,k) \in D$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $|g(h,k,\xi)| \leq 1 + Ck$. Montrer qu'il existe $(\kappa, \beta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ tels que pour tout $U^0 \in h^1(\mathbb{Z})$ pour tout $(h,k) \in D$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $\|U^n\| \leq \kappa e^{\beta nk}\|U^0\|$.

II.1.g. En déduire que, sous les hypothèses de **f.** le schéma (5) est fortement stable sur D.

II.2. On veut démontrer la réciproque du **II.1.g.** On raisonne par l'absurde : on se donne $D \subset]0,1[^2$ tel que $(0,0) \in \bar{D}$ et on suppose que le schéma est fortement stable sur D et que pour tout $q \in \mathbb{N}$, il existe $(h_q, k_q) \in D$, $\xi_q \in \mathbb{R}$ tels que $|g(h_q, k_q, \xi_q)| > 1 + qk_q$.

II.2.a. Montrer que pour tout $q \in \mathbb{N}$, il existe $\varepsilon_q \in]0, \pi/2[$ tel que pour tout $\xi \in [\xi_q - \varepsilon_q, \xi_q + \varepsilon_q]$ on a $|g(h_q, k_q, \xi)| > 1 + qk_q$.

II.2.b. On considère la fonction f_q définie de la façon suivante :

- f_q est continue,
- $f_q(\xi) = 1$ si $\xi \in [\xi_q - \varepsilon_q, \xi_q + \varepsilon_q]$,
- $f_q(\xi) = 0$ si $\xi \in [\xi_q - \pi, \xi_q - 2\varepsilon_q] \cup [\xi_q + 2\varepsilon_q, \xi_q + \pi]$,
- $f_q(\xi)$ est affine sur $[\xi_q - 2\varepsilon_q, \xi_q - \varepsilon_q]$ et sur $[\xi_q + \varepsilon_q, \xi_q + 2\varepsilon_q]$,
- f_q est 2π-périodique.

Montrer qu'il existe $U^{0,q} \in h^1(\mathbb{Z})$ tel que $\widehat{U^{0,q}}(\xi) = f_q(\xi)$.

II.2.c. En déduire une contradiction et la réciproque du **II.1.g.**

II.3.

II.3.a. Montrer que pour tout $a > 0$, pour tout $D \subset]0,1[^2$ tel que $(0,0) \in \bar{D}$, (Σ_1) n'est pas fortement stable sur D.

II.3.b. Pour tout $\alpha > 0$, on note $D_\alpha = \{(h,k) \in]0,1[^2 \ / \ k \leq \alpha h\}$. On suppose que $a < 0$. Montrer que (Σ_1) est fortement stable sur D_α si et seulement si $\alpha \leq -1/a$.

II.4. On se donne $(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{N}^3$ et des fonctions $(a_j(h,k))_{j=-p_1,\dots,p_1}$, $(b_j(h,k))_{j=-p_2,\dots,p_2}$, $(c_j(h,k))_{j=-p_3,\dots,p_3}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $]0,1[^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose $Q(h,k,\xi) = \sum_{j=-p_1}^{p_1} a_j(h,k)e^{-ij\xi}$ et on suppose que

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \forall (h,k) \in]0,1[^2,\ Q(h,k,\xi) \neq 0. \tag{6}$$

On veut montrer le résultat suivant :
Pour tout $(V_0, V_1) \in (h^1(\mathbb{Z}))^2$, il existe un unique $(U^n)_{n\in\mathbb{N}} \in (h^1(\mathbb{Z}))^{\mathbb{N}}$ solution de

$$\sum_{j=-p_1}^{p_1} a_j(h,k)S_+^j U^{n+2} + \sum_{j=-p_2}^{p_2} b_j(h,k)S_+^j U^{n+1} + \sum_{j=-p_3}^{p_3} c_j(h,k)S_+^j U^n = 0,\ \forall n \geq 0, \tag{7}$$

avec

$$U^0 = V_0 \text{ et } U^1 = V_1. \tag{8}$$

On introduit $s = \{a = (a_m)_{m\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z}) \ / \ \forall r \in \mathbb{N}, \sum_{m\in\mathbb{Z}} m^{2r}|a_m|^2 < +\infty\}$.

II.4.a. Montrer que $a \in s$ si et seulement si $\hat{a} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

II.4.b. Soit $V_0 \in h^1(\mathbb{Z})$ et $V_1 \in h^1(\mathbb{Z})$. Soit $(U^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une solution de (7)-(8) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U^n \in h^1(\mathbb{Z})$. Montrer, en utilisant (6), qu'il existe

deux fonctions $\phi_1(h,k,\xi)$ et $\phi_2(h,k,\xi)$ (que l'on explicitera) de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,1[\times]0,1[\times\mathbb{R}$ telles que

(9) $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ \widehat{U^{n+2}}(\xi) = \phi_1(h,k,\xi)\widehat{U^{n+1}}(\xi) + \phi_2(h,k,\xi)\widehat{U^n}(\xi).$

En déduire qu'il existe au plus une solution $(U^n)_{n\in\mathbb{N}} \in (h^1(\mathbb{Z}))^{\mathbb{N}}$ de (7)-(8).

II.4.c. Soit $V_0 \in s$ et $V_1 \in s$. On note $(\widehat{U^n}(\xi))_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies par (9) et $\widehat{U^0}(\xi) = \widehat{V_0}(\xi)$ et $\widehat{U^1}(\xi) = \widehat{V_1}(\xi)$. On note de plus

$$U_m^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \widehat{U^n}(\xi)e^{-im\xi}d\xi.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U^n \in s$ et que U^n est solution de (7)-(8).

II.4.d. On munit $h^1(\mathbb{Z})$ de la norme $\|a\|_1 = \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} m^2|a_m|^2 + |a_0|^2\right)^{1/2}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $(h,k) \in]0,1[^2$, il existe $\kappa_n(h,k) > 0$ tel que pour tout $(V_0,V_1) \in s\times s$, la solution (U^n) de (7)-(8) trouvée au **c** vérifie

$$\|U^n\|_1 \le \kappa_n(h,k)(\|V_0\|_1 + \|V_1\|_1).$$

II.4.e. Montrer que $(h^1(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_1)$ est complet et que s est dense dans $h^1(\mathbb{Z})$.

II.4.f. En déduire que pour tout $(V_0,V_1) \in (h^1(\mathbb{Z}))^2$, il existe une unique $(U^n)_{n\in\mathbb{Z}} \in (h^1(\mathbb{Z}))^{\mathbb{N}}$ solution de (7)-(8).

II.4.g. La famille d'applications indexée par $(h,k) \in]0,1[^2$ qui à $(V_0,V_1) \in (h^1(\mathbb{Z}))^2$ associe $(U^n)_{n\in\mathbb{Z}} \in (h^1(\mathbb{Z}))^{\mathbb{N}}$ est appelée **schéma implicite à deux pas**. Peut-on appliquer le résultat précédent à :

$$(\Sigma_2) \qquad \frac{3U_m^{n+2} - 4U_m^{n+1} + U_m^n}{k} + a\frac{U_{m+1}^{n+2} - U_{m-1}^{n+2}}{h} = 0\ ?$$

Partie III

Soit $d \ge 1$. Dans cette partie, on travaille dans $(l^2(\mathbb{Z}))^d$. Si $a = (a_m)_{m\in\mathbb{Z}} \in (l^2(\mathbb{Z}))^d$, les composantes de a_m sont notées $a_m = (a_m(1),\dots,a_m(d))$ et

$$\|a\| = \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} |a_m(1)|^2 + \dots + |a_m(d)|^2\right)^{1/2}.$$

On définit l'opérateur S_+ par

$$(S_+a)_m = (a_{m+1}(1),\dots,a_{m+1}(d)).$$

On désigne par $\mathcal{M}_{d,d}(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées à coefficients complexes d'ordre d. Si $A \in \mathcal{M}_{d,d}(\mathbb{C})$ et $a \in (l^2(\mathbb{Z}))^d$, Aa désigne la suite de terme général $(Aa)_m = Aa_m$.

III.1. Montrer que S_+ et $a \mapsto Aa$ définissent des applications linéaires continues de $(l^2(\mathbb{Z}))^d$ dans lui-même.

III.2. On se donne $(p_1,p_2) \in \mathbb{N}^2$ et $(A_j)_{j=-p_1,\dots,p_1}$, $(B_j)_{j=-p_2,\dots,p_2}$ des applications $\mathcal{C}^\infty$ de $]0,1[^2$ à valeurs dans $\mathcal{M}_{d,d}(\mathbb{C})$. On suppose que

(10) $\quad \det\left(\sum_{j=-p_1}^{p_1} A_j(h,k)e^{-ij\xi}\right) \ne 0, \forall\xi \in \mathbb{R},\ \forall(h,k) \in]0,1[^2.$

Pour $a \in (h^1(\mathbb{Z}))^d$, on pose $\hat{a}(\xi) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m e^{im\xi} \in \mathbb{C}^d$. Soit $(U^n)_{n\in\mathbb{N}} \in (h^1(\mathbb{Z}))^{\mathbb{N}}$ vérifiant

$$(11) \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{j=-p_1}^{p_1} A_j(h,k) S_+^j U^{n+1} + \sum_{j=-p_2}^{p_2} B_j(h,k) S_+^j U^n = 0.$$

Montrer qu'il existe

$$G : \begin{array}{ccc}]0,1[\times]0,1[\times\mathbb{R} & \to & \mathcal{M}_{d,d}(\mathbb{C}) \\ (h,k,\xi) & \mapsto & G(h,k,\xi) \end{array}$$

de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $(h,k,\xi) \in]0,1[\times]0,1[\times\mathbb{R}$, on ait

$$\widehat{U^{n+1}}(\xi) = G(h,k,\xi)\widehat{U^n}(\xi).$$

III.3. En s'inspirant de la question **II.4**, montrer que pour tout $V_0 \in (h^1(\mathbb{Z}))^d$, il existe une unique suite $(U^n)_{n\in\mathbb{N}} \in ((h^1(\mathbb{Z}))^d)^{\mathbb{N}}$ vérifiant (11) et $U^0 = V_0$. La famille d'applications indexée par $(h,k) \in]0,1[^2$ qui à $U^0 \in (h^1(\mathbb{Z}))^d$ associe $(U^n)_{n\in\mathbb{N}} \in ((h^1(\mathbb{Z}))^d)^{\mathbb{N}}$ est appelée **schéma vectoriel**.

III.4. Ecrire le schéma (Σ_2) défini à la question **II.4.g** sous la forme d'un schéma vectoriel sur $\mathbb{R}^2$.

III.5. Soit $D \subset]0,1[^2$ tel que $(0,0) \in \bar{D}$. On dit que le schéma (11) est **faiblement stable** sur D si et seulement si il existe $(\kappa,\beta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ tels que pour tout $(h,k) \in D$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|||(G(h,k,\xi))^n||| \leq \kappa e^{\beta nk}$, où $|||\cdot|||$ désigne la norme matricielle subordonnée à la norme hermitienne sur $\mathbb{C}^d$.

On note $(g_i(h,k,\xi))_{i=1,\ldots,d}$ les valeurs propres complexes de $G(h,k,\xi)$. Montrer que si (11) est faiblement stable sur D, alors il existe $C > 0$ tel que pour tout $(h,k) \in D$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, pour tout $i = 1,\ldots,d$,

$$(12) \qquad |g_i(h,k,\xi)| \leq 1 + Ck.$$

III.6. On considère les schémas suivants :

$$(\Sigma_3) \qquad \begin{cases} \dfrac{U_m^{n+1}(1) - U_m^n(1)}{k} &= a\dfrac{U_{m+1}^n(2) - U_{m-1}^n(2)}{2h}, \\ \dfrac{U_m^{n+1}(2) - U_m^n(2)}{k} &= a\dfrac{U_{m+1}^n(1) - U_{m-1}^n(1)}{2h}. \end{cases}$$

$$(\Sigma_4) \qquad \begin{cases} \dfrac{U_m^{n+1}(1) - U_m^n(1)}{k} &= -a\dfrac{U_{m+1}^n(2) - 2U_m^n(2) + U_{m-1}^n(2)}{h^2}, \\ \dfrac{U_m^{n+1}(2) - U_m^n(2)}{k} &= 0, \end{cases}$$

où $a \in \mathbb{R}$.

III.6.a. Calculer les matrices G et les valeurs propres g_i pour ces deux schémas.

III.6.b. Comme à la question **II.3.b** pour $\alpha > 0$, on note

$$D_\alpha = \{(h,k) \in]0,1[^2 \ /\ k \leq \alpha h\}.$$

Montrer que, pour tout $\alpha > 0$, (Σ_3) n'est pas faiblement stable sur D_α.

III.6.c. Montrer que (Σ_4) vérifie (12). Existe-t-il $D \subset]0,1[^2$ tel que $(0,0) \in \bar{D}$ sur lequel (Σ_4) est faiblement stable ?